



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.201

CLASA A V-A

### Subiectul I

- a) Calculați:  $13^5 : 13^2 + \left\{ (17^3)^5 : 17^{14} + 2 \cdot \left[ (2^3 \cdot 5^2)^4 : 100^4 + 253 : 23 \right] \right\} - (2^8 - 2^2)$ .
- b) Arătați că numărul  $x = \overline{74a} + \overline{4a7} + \overline{a74}$  este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra nenulă  $a$ .

### Subiectul II

- a) Aflați restul împărțirii numărului  $a = 2017 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2016)$  la 2016.
- b) Arătați că suma primelor 2017 numere impare este pătrat perfect.
- c) Scrieți numărul  $2017^2$  ca sumă de 2017 numere naturale consecutive.

### Subiectul III

Să se determine numerele naturale  $a$  și  $b$  a căror sumă este egală cu 323, știind că împărțindu-l pe  $a$  la  $b$  se obține câtul 16 și restul nenul.

### Subiectul IV

Un număr natural se numește *cub bipătratic* dacă este cub perfect și se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule diferite. Un număr natural se numește *pătrat bicubic* dacă este pătrat perfect și se scrie ca suma a două cuburi perfecte nenule diferite.

- a) Dați un exemplu de cub bipătratic și un exemplu de pătrat bicubic.
- b) Arătați că există o infinitate de cuburi bipătratic și o infinitate de pătrate bicubice.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.201

CLASA A VI-A

### Subiectul I

Aflați numerele prime  $a, b, c$ , știind că verifică simultan relațiile  $c - ab = 15$  și  $c - a^2 = 49$ .

### Subiectul II

- a) Descompuneți în factori primi numărul 2015.
- b) Arătați că fracția  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 + 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2014 \cdot 2016 + 1}$  este ireductibilă.

### Subiectul III

Se dau unghiul  $\sphericalangle AOB$  cu măsura de  $150^\circ$  și unghiul  $\sphericalangle COD$  drept, astfel încât punctele  $C$  și  $D$  se află în semiplane opuse față de dreptele  $OA$  și  $OB$ . Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle BOD$ .

### Subiectul IV

Fie  $A, B, C, D$  pe dreapta  $d$  astfel încât  $[CD] \subset [AB]$  și  $[AC] \equiv [BD]$ . Arătați că:

- a) Segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$  au același mijloc.
- b) Dacă se colorează punctele dreptei cu două culori, alb și roșu, atunci există 3 puncte de aceeași culoare astfel încât unul este mijlocul segmentului determinat de celelalte două.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.

---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016**  
**CLASA A VII-A**

**Subiectul I**

- a) Să se arate că există numere iraționale  $x$  pentru care  $\sqrt{3-x^2}$  este număr rațional.  
b) Există numere raționale  $x$  pentru care numărul  $\sqrt{3-x^2}$  să fie rațional? Justificați răspunsul dat.

**Subiectul II**

Se consideră numerele:  $S_1 = [\sqrt{1 \cdot 2}]$ ,  $S_2 = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}]$ , ...,  $S_n = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}]$ , unde prin  $[a]$  am notat partea întreagă a numărului  $a$  și  $n$  este un număr natural nenul.

- a) Calculați  $S_{63}$ .  
b) Demonstrați că numărul  $A = \sqrt{2 \cdot S_n + n}$  nu este rațional, oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ .

**Subiectul III**

Fie  $ABCD$  un paralelogram cu  $BC > 2 \cdot AB$ . Bisectoarea unghiului  $ABC$  intersectează diagonala  $AC$  în punctul  $E$ , iar bisectoarea unghiului  $DCB$  intersectează diagonala  $BD$  în punctul  $F$ .

- a) Arătați că aria triunghiului  $AEB$  este egală cu aria triunghiului  $CFD$ .  
b) Demonstrați că dreapta  $EF$  este paralelă cu dreapta  $BC$ .

**Subiectul IV**

Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic cu  $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Bisectoarea unghiului  $ACB$  intersectează dreapta  $AD$  în punctul  $G$  și latura  $AB$  în punctul  $E$ . Se notază cu  $F$  piciorul perpendicularei din  $E$  pe latura  $BC$ .

- a) Arătați că patrulaterul  $AEFG$  este romb.  
b) Dacă triunghiul  $AEG$  este echilateral, aflați raportul dintre aria patrulaterului  $AEFG$  și aria triunghiului  $ABC$ .

**Timp de lucru 3 ore**

**Toate subiectele sunt obligatorii**

**Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7**

---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016  
CLASA A VIII-A**

**Subiectul I**

Se consideră numărul  $a = \sqrt{7 + \sqrt{33}} - \sqrt{7 - \sqrt{33}}$ .

- a) Arătați că  $a^2$  este număr natural;
- b) Dacă  $b = (a - 2)^{2016}$ , aflați partea întreagă a numărului  $b$ ;
- c) Știind că  $c = (a^4 + a^3 - 6a^2 - 6a - 1)^{2016}$ , stabiliți dacă  $c \in (0, 2)$ .

**Subiectul II**

Fie numerele  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Arătați că:

- a)  $\sqrt{4a^2 + 4b^2 + c^4} + \sqrt{4a^2 + 4c^2 + b^4} + \sqrt{4c^2 + 4b^2 + a^4} = 5$ ;
- b)  $-\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3}$ .

**Subiectul III**

În cubul ABCDA'B'C'D' se notează cu P proiecția punctului C' pe diagonala A'C. Demonstrați că dreptele AP și D'P sunt perpendiculare.

**Subiectul IV**

Fie ABCD un trapez dreptunghic cu  $m(\angle D) = 90^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 2\text{cm}$ ,  $DC = 6\text{cm}$  și  $AD = 4\sqrt{3}\text{cm}$ .

Pe perpendiculara în D pe planul (ABC) se consideră punctul E astfel încât  $DE = 8\text{cm}$ . Fie  $M \in (BC)$  astfel încât  $BM = 2\text{cm}$ .

- a) Demonstrați că  $AM \perp (EDM)$ ;
- b) Calculați distanța de la punctul D la planul (AEM).

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.